c) $p(E) = p(E_1) + p(E_2) + p(E_3) = \frac{72+60+50}{675} = \frac{182}{675}$

d) $p(E_1 \mid E) = \frac{p(E \cap E_1)}{p(E)} = \frac{p(E_1)}{p(E)} = \frac{\frac{8}{75}}{\frac{182}{675}} = \frac{36}{91}$

2) a) $n \geq 2$, soit A_n l'événement << obtenir au moins une boule blanche parmi les n boules tirées >>

$\overline{A_n}$ << N'obtenir aucune boule blanche >>

Donc toutes les boules tirées sont rouges

$p(\overline{A_n}) = (\frac{2}{6})^n = \frac{1}{3^n}$

D'où $p(A_n) = 1 - p(\overline{A_n}) = \boxed{1 - \frac{1}{3^n} = p_n}$

b) $p_n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3^n} \geq 0{,}99 \Leftrightarrow (\frac{1}{3})^n \leq 0{,}01$

ln:log.népérien

$\ln((\frac{1}{3})^n \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \ln\frac{1}{3} \leq \ln(0{,}01)$

$(\ln\frac{1}{3} \leq 0)$ donc $n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(\frac{1}{3})} \approx 4{,}19$

Conclusion : $\boxed{n \geq 5}$

Exercice 5

$\boxed{3B,2N}$ $\boxed{1B,4N}$

U_1 U_i $2 \leq i \leq n$

1) E_1 : tirer une blanche parmi les trois de l'urne U_1

$\overline{E_1}$: tirer une noire parmi les deux de l'urne U_1

$p(E_1) = \frac{3}{5}$

- On prend une blanche de U_1 que l'on mettre dans U_2 puis on tire une blanche de deux dans l'urne U_2 qui contient dans ce cas six boules d'où :

$p(E_2 \mid E_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- On prend une noire de U_1 que l'on mettre dans U_2 puis on tire une blanche de l'urne U_2 qui contient dans ce cas une blanche et cinq noires d'où :

$p(E_2 \mid \overline{E_1}) = \frac{1}{6}$

On a $p(E_2) = p(E_2 \cap E_1) + p(E_2 \cap \overline{E_1})$

$= p(E_1).p(E_2 \mid E_1) + p(\overline{E_1})\, p.(E_2 \mid \overline{E_1})$

$= \frac{3}{5} x \frac{1}{3} + \frac{2}{5} x \frac{1}{6} = \frac{4}{15}$

2) $p_{k+1} = p(E_{k+1})$

a) $p(E_{k+1}) = p(E_{k+1} \cap E_k) + p(E_{k+1} \cap \overline{E_k})$

$= p(E_k).p(E_{k+1} \mid E_k) + p(\overline{E_k})\, p(E_{k+1} \mid \overline{E_k})$

$= p_k x \frac{2}{6} + (1 - \overline{p_k}) x \frac{1}{6}$

$p_{k+1} = p_k(\frac{2}{6} - \frac{1}{6}) + \frac{1}{6}$

$p_{k+1} = \frac{1}{6} p_k + \frac{1}{6}$

b) On a : $V_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{6} - \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{6} p_n - \frac{1}{30} = \frac{1}{6}(p_n - \frac{1}{5})$

D'où $V_{n+1} = \frac{1}{6} V_n$ ce qui prouve que la suite V est géométrique de raison $\frac{1}{6}$

c) On sait que : $V_n = V_1 x (\frac{1}{6})^{n-1}$

Or on a : $V_1 = p_1 - \frac{1}{5} = p(E_1) - \frac{1}{5} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow \quad V_n = \frac{2}{5} x (\frac{1}{6})^{n-1}$

Par suite : $p_n = V_n + \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{p_n = \frac{2}{5} x (\frac{1}{6})^{n-1} + \frac{1}{5}}$

$\lim_{n \to +\infty} p_n = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{2}{5} x (\frac{1}{6})^{n-1} + \frac{1}{5} \right] = \frac{1}{5}$

$\lim_{n \to +\infty} (\frac{1}{6})^{n-1} = 0$

$-1 < \frac{1}{6} < 1$

Exercice 6